MATHÉMATIQUES

Devoir (n°01) non surveillé à rendre le jour de la rentrée

L'usage d'une calculatrice *est INTERDIT* **pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.**

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et éventuellement remplacera son sujet.

Il est demandé de faire figurer les réponses aux enigmes mathématiques dans la grille en ROUGE. Les autres cases sont à remplir en bleu ou en noir.

Il suffit de rendre la grille, aucune justification n'est à fournir. Vous n'êtes pas obligés de finir la grille une fois les enigmes trouvées.

Exercice 1

Soit la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_x^{6x} \frac{e^t}{t} dt.$$

Déterminer $\exp(l)$, où l est la limite de F lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 2

Déterminer la limite de la fonction f suivante au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{(\cos(x^2) - 1)\sin(x)}{(1 - exp(x/6)) \times (\ln(1-x))^4}.$$

Exercice 3

On lance 84 fois une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de "piles" obtenus. On lance X fois un dé à six faces, on note Y le nombre de "6" obtenus. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire réelle Y.

Exercice 4

On définit une suite (u_n) par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

Donner comme réponse :

- 9 si la limite n'existe pas.
- 8 si la limite existe mais dépend de u_0.
- la valeur de la limite si elle existe et ne dépend pas de u_0.

Exercice 5

On définit la matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner comme réponse :

- 9 si l'argument suivant est valable :

  Il n'y a pas de 0 *sur la diagonale donc la matrice est inversible.*
- 8 si la matrice est inversible mais que l'argument précédent est faux.
- 7 si la matrice est non inversible et que son noyau est de dimension 0.
- la valeur de la dimension du noyau de la matrice si elle n'est pas inversible.

Exercice 6

On définit le polynôme suivant :

$$P(X) = 2X^3 + \frac{14}{3}X^2 - 6X - 14.$$

On admet que ce polynôme admette trois racines réelles pas forcément distinctes.

Donner comme réponse :

- 1 Comme tous les coefficients sont positifs, le polynôme n'admet pas de racine réelle.
- le produit des racines si celui-ci est dans $[[1, 9]]$.

Exercice 7

On définit le polynôme suivant :

$$P(X) = X^4 + 8X^3 + 18X^2 + 16X + 5.$$

On admet que ce polynôme admette trois racines réelles pas forcément distinctes.

Donner comme réponse :

- 1 si l'argument suivant est valable :
  le polynôme n'admet pas de racines réelles car tous les coefficients sont positifs.
- 2 si la proposition suivante est valable :
  le polynôme admet quatre racines réelles distinctes.
- 3 si la proposition suivante est valable :
  le polynôme admet deux racines réelles doubles.
- 4 si la proposition suivante est valable :
  le polynôme admet une racine réelle triple.

Exercice 8

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 11$, $u_1 = 10$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) si elle existe. On donnera comme réponse 1 si la suite n'est pas convergente.

Exercice 9

On veut trouver un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

$$f(x) = \frac{2x^7 + x^2 \ln(1 + x^3) \tan(x^3)}{\sin(x)}.$$

Déterminer la valeur de α telle que :

$$f(x) \sim Cx^\alpha,$$

où C est une constante réelle.

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[[a, b]]$, où a et b sont des nombres entiers positifs ou nuls vérifiant $a < b$. On suppose que cette variable aléatoire vérifie la propriété suivante :

$$E(X) = \frac{12}{b - a + 1}.$$

Déterminer la valeur de b.

Exercice 11

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que X est une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[[1, n]]$. On fait X lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. On note Y le nombre de "*piles*" obtenus. Déterminer la valeur de n pour que l'on ait la relation suivante :

$$nP(Y = 0) = \frac{511}{256}.$$

Exercice 12

On se place dans les nombrse complexes et on s'intéresse à l'équation suivante (en la variable complexe z) :

$$z^2 = \bar{z}.$$

Déterminer le nombre de solution(s) à cette équation.

Exercice 13

Soit X est une variable aléatoire réelle d'univers image $[[1, n]]$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall k \in [[1, n]], \quad P(X = k) = \frac{k}{\alpha},$$

où α est une constante réelle. Déterminer la valeur de n pour que l'on ait :

$$\alpha = 21.$$

Exercice 14

On définit la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est composée de 0 sauf sur la diagonale et sur le coefficient en haut à droite. Déterminer l'entier naturel n tel que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 8 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15

On note I l'intégrale suivante :

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^2 \frac{40}{x^2 + 4} dx.$$

Déterminer la valeur de l'intégrale.

Exercice 16

On admet qu'il existe un nombre réel A tel que l'on ait :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim A \ln(n),$$

lorsque n tend vers $+\infty$. À l'aide d'une fonction en langage Python, conjecturer la valeur de ce nombre A.

Exercice 17

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$y' + \frac{1}{x} y = 0.$$

Parmi le ssolution, on cherche celle qui vérifie $y(1) = 2$. Déterminer alors $y\left(\frac{1}{4}\right)$.

Exercice 18

On définit la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la somme des coefficients de l'inverse de la matrice M.

Exercice 19

Soit m un paramètre réel. On s'intéresse au système suivant :

$$\begin{cases} x + 4y + (m-5)z = 0 \\ -x - 2y + (5-m)z = 0 \\ -4y + (10-5m)z = 0 \end{cases}$$

Déterminer pour quelle valeur de m le système n'est pas de Cramer.

Exercice 20

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

On suppose que $y'(0) = -5$ et que $y(1) = \dfrac{7}{e^2}$. Déterminer la valeur de $y(0)$.

Exercice 21

Soit m un paramètre réel, déterminer pour quelle valeur de m la matrice suivante A_m a un noyau de dimension maximale.

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 22

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, suivant une loi binômiale $\mathcal{B}(3,2)$.

Soit ε un réel strictement positif. Déterminer pour quelle valeur de m, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 23

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Soit f la solution de l'équation différentielle qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -4$. On cherche un équivalent de la forme :

$$2e^{-2x} - f(x) \sim Cx^{\alpha},$$

où C est une constante réelle et α est un entier naturel.

Déterminer la valeur de C.

Exercice 24

On définit l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}^6$ par la relation suivante :

$$\forall x_1, ..., x_6 \in \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, ..., x_6) = (x_5, x_5 + x_4, x_4 + x_3, x_3 - x_2, 2x_2 + 3x_1).$$

Déterminer le rang de l'application linéaire.

Exercice 25

On définit le polynôme P par :

$$P(X) = (X+1)^7 - X^7.$$

Déterminer le coefficient dominant du polynôime P.

Exercice 26

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\forall x_1, ..., x_5 \in \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2, ...x_5) = 2(x_5, ..., x_1).$$

Si on appelle A la matrice de ϕ dans la base canonique, déterminer la trace de la matrice A.

Exercice 27

On définit le polynôme P par l'expression :

$$P(X) = X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 7X + 2.$$

Déterminer le plus grand ordre de multiplicité des racines du polynôme P.

Exercice 28

On lance 36 fois une pièce de monnaie équilibrée.
On note X le nombre de "*piles*" obtenus. Déterminer la variance de la variable aléatoire réelle X.

Exercice 29

Soit f une fonction définie continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x) + 8.$$

En montrant que la fonction $g : x \to f(x) - 8x$ est périodique, déterminer la limite de la fonction $x \to \dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 30

Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

déterminer la somme des nombres réels $\lambda(\in \mathbb{R})$ tels que la matrice $M - \lambda I_3$ soit non inversible.

Exercice 31

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

La fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2).$$

Déterminer le coefficient a_2.