Classes préparatoires MPSI-PCSI,
Lycée Châtelet, Douai
Rentrée de Septembre 2017

Consignes d'été en Mathématiques

Vous trouverez dans ce document trois rubriques :

1. Le mot du professeur de mathématiques de la classe de MPSI.
2. Le mot du professeur de mathématiques de la classe de PCSI.
3. Les exercices à faire, communs aux classes de PCSI et MPSI.

Pour les MPSI : le mot du professeur

Dès la rentrée, vous passerez une douzaine d'heures par semaine avec votre professeur de mathématiques (cours, TD, interrogations orales appelées aussi colles). Le programme est à la hauteur de votre emploi du temps : chargé ! Aussi serait-il de bon ton d'être prêt tant sur le plan matériel qu'intellectuel.

Pour les fournitures, les cours et exercices seront effectués sur le support de votre choix. Les devoirs (maisons ou surveillés) seront faits sur des copies doubles. Achetez-en en quantité ! **La calculatrice étant interdite dans beaucoup d'épreuves de mathématiques lors des concours, elle sera interdite tout au long de l'année** donc celle que vous possédez déjà suffira amplement pour les autres matières. Enfin vous vous munirez impérativement d'un cahier, plutôt grand format (par exemple 24×32) pour le jour de la rentrée.
Sur celui-ci, vous résumerez au fur et à mesure de l'année les cours dispensés. Il remplacera les fiches cartonnées volantes que vous avez sûrement dû faire en terminale. Ce cahier constituera en fin d'année le corpus essentiel des connaissances acquises en vue d'affronter la deuxième année de prépa. Ce cahier sera vérifié chaque semaine au cours de l'année.

Afin d'affronter ce nouveau défi que constitue la classe préparatoire, il faut démarrer sur des bases saines ; les connaissances du lycée sont à conserver. *Toutes les formules et techniques de calcul vues en cycle terminal sont à* ***bien*** *connaître.* A ce titre, je vous conseille de reprendre dans un premier temps vos cours de première et terminale afin d'en dégager les formules principales que vous résumerez dans un formulaire.
Dans un second temps, des révisions pendant les vacances, sont nécessaires. Pour vous y encourager, je vous impose cette liste d'exercices à faire tout au long de l'été (1 par semaine) et à avoir rédigé sur copie pour le jour de la rentrée. Certains passages sont plus difficiles que d'autres. Même si vous ne trouvez pas la solution à chacune de ces questions, il est important d'essayer et de voir où vous êtes bloqués. C'est seulement à cette condition que vous progresserez et que la correction vous sera profitable.

Mes coordonnées en cas de question ou de demande d'indication sur les exercices proposés sont :

Madame Bailloeuil-Inglart
Tél : 06-51-62-47-82
Courriel : melissa.inglart@free.fr
Site : http ://melissa.inglart.free.fr

N'hésitez surtout pas à me contacter, je répondrai à vos questions avec plaisir.

Pour les PCSI : le mot du professeur

À partir de la rentrée nous passerons beaucoup de temps ensemble (6h de cours, 3h30 de TD) et le travail demandé ira largement au-delà de celui que vous pouviez fournir en terminale. Pour se faciliter la tâche, nous vous proposons des exercices à travailler pendant les vacances pour prendre un bon départ en septembre. Nous aurons besoin de toutes vos connaissances mathématiques du lycée ; en particulier des formules et des techniques de calcul qui doivent être impérativement connues sur le bout des doigts (identités remarquables, formules de trigonométrie, règles de dérivation, etc). Vous devez par conséquent structurer intelligemment vos vacances afin de faire sérieusement le point sur ce que vous avez vu ces trois dernières années. Rédiger des fiches, formulaires, etc, peut être un bon moyen de s'y atteler.

Le cours mathématiques de PCSI offre une importante palettes de savoirs et de savoir-faire ; un formidable enrichissement intellectuel qui ne sera pas toujours facile à assimiler. Mais je serai là. L'objectif est tout autant de vous nourrir de science que de vous accompagner dans le développement de votre autonomie, de votre capacité à analyser, comprendre, traiter rationnellement, démontrer et expliquer, partager. Trouver une solution ne sera pas suffisant : il faudra vous faire comprendre par des rédactions de réponses au français impeccable qui devront trouver le meilleur équilibre entre concision et efficacité ; le maître mot sera "synthétique". Vos travaux d'été seront à rendre sur copie à la rentrée et me permettront de vous jauger sur ce terrain. Sécher sur une question, se planter, sont des phases qui font entièrement partie du processus d'apprentissage. Lao Tseu ne disait-il pas « L'échec est le fondement de la réussite » ? Il est essentiel d'essayer. Et d'essayer encore. Parfois changer de sujet de préoccupation permet de lever les difficultés pour mieux revenir sur ce qu'on avait provisoirement laissé de côté. Dans le même ordre d'idée il est important de gérer sainement la procrastination. Pendant l'année, en cas de blocage ou d'incompréhension, vous aurez tout loisir de me poser des questions pendant nos nombreuses heures de vie commune ! Les solutions sont en vous, il suffit (et il faut) de les trouver. Comme n'a pas dit Lao-Tseu :

> « Si tu donnes un poisson à un homme, il se nourrit une fois. Si tu lui apprends à pêcher, il se nourrira toute sa vie. »

En ce qui concerne l'organisation matérielle, vous êtes entièrement libres de choisir cahiers ou classeurs pour prendre vos cours et exercices mais ceux-ci doivent être séparés pour pouvoir être travaillés indépendamment. Sachez que vos prises de notes seront plusieurs fois contrôlées dans l'année pour en vérifier le sérieux. Votre travail passera nécessairemnt par la rédaction d'un vade-mecum sur un cahier : vous y rédigerez au fur et à mesure l'essentiel sur les délices que vous aurez collectionnées tout au long de la sup' ; ce bréviaire vous sera bien utile pour la suite des événements en spé. Ecrire proprement, souligner les faits importants font partie de l'hygiène minimale : découverte parfois surprenante pour le taupin, vous n'écrivez pas pour vous mais pour celui qui essaie de vous comprendre. Au fait, pour les devoirs écrits, prévoyez des copies doubles en grande quantité. . .

Aucun modèle de calculatrice n'est demandé en particulier, la calculatrice utilisée en terminale fera parfaitement l'affaire.

La prépa n'est pas le lieu de la solitude mais celui du travail personnel tout autant sérieux, exigeant qu'encadré, soutenu. Il doit aussi s'y développer une solidarité, une cordée pour gravir. Citons Victor Hugo :

> « Rien n'est solitaire, tout est solidaire. L'homme est solidaire avec la planète, la planète est solidaire avec le soleil, le soleil est solidaire avec l'étoile, l'étoile est solidaire avec la nébuleuse, la nébuleuse, groupe stellaire, est solidaire avec l'infini. Ôtez un terme de cette formule, le polynôme se désorganise, l'équation chancelle, la création n'a plus de sens dans le cosmos et la démocratie n'a plus de sens sur la terre. Donc, solidarité de tout avec tout, et de chacun avec chaque chose. La solidarité des hommes est le corollaire invincible de la solidarité des univers. Le lien démocratique est de même nature que le rayon solaire. »

Bonnes (tout de même) vacances,

Pierre Flédrich

Pour me contacter par mail : pierre.fledrich@laposte.net

Exercices communs pour les MPSI et PCSI

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. $\cos(a+b) =$ $\qquad\qquad$ $\cos(a-b) =$
2. Vérifier que $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
3. $\sin(a+b) =$
4. Obtenir une formule pour $\cos(n\pi), \forall n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer pour $a \geqslant b \geqslant 0$ que
$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{a-b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{a-b})}$$
6. Simplifier les expressions suivantes.
$$A = \ln(10^4) + \ln(1000) - \ln(0.01) \qquad B = 5^0 \times e^{(2\ln(5))} \qquad C = \frac{\ln(3^5)}{\ln(3)} \qquad D = (-1)^{10}\,\frac{e^3-e^5}{e^3+e^4}$$
7. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{1}{x}$, calculer $f'(x)$; On pose $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = f'(x)$, calculer $g'(x)$.
8. Discuter et résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2}{x}$
9. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{ax+b}$, $x \mapsto sin(ax+b)$ et $x \mapsto cos(ax+b)$.
10. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation
$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}$$

Exercice 2

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant là où elles sont dérivables
   (a) $x \mapsto \sqrt{1-x}$
   (b) $x \mapsto (1-x)e^{(-x^2)}$
   (c) $x \mapsto e^{(-e^{-x})}$
   (d) $x \mapsto -\ln(1-x)$
2. Déterminer les limites suivantes (si elles existent)
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \text{ (on pourra utiliser la forme conjuguée)} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln(x)e^{-5x} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x)e^{-5x}$$
3. Déterminer, pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $-2e^{2x} + 8e^x$
4. Déterminer, pour tout x de $]0;+\infty[$, le signe de $5\,(\ln(x))^2 - 10\ln(x) + 5$
5. Résoudre l'équation
$$\frac{x+7}{x-3} + \frac{4x-2}{x-5} = 5$$
6. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$
7. Mettre sous forme de quotients avec un dénominateur rationnel les quantités
   (a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$
   (b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} =$
   (c) $\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} =$
   (d) $\frac{3+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}} =$
8. Simplifier l'expression
$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$
9. Mettre sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants en détaillant les calculs (Attention : calculatrice magique interdite).

(a) $(1+i)^4$
(b) $(1-3i)^2$
(c) $i(i+1)(2i+1)^2$
(d) $\frac{1}{1+2i}$
(e) $\frac{1-i}{1+3i}$
(f) $\frac{\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)}{1-i\sqrt{3}}$
(g) $\frac{1+2i}{10-i}$

Exercice 3
Au tennis, le joueur qui « est au service » joue une première balle.
Si elle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si elle est jugée « faute », il joue une deuxième balle.
Si cette deuxième balle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si cette deuxième balle est jugée « faute », il perd.
On désigne par
S_1 : l'événement « la 1re balle de service est « bonne » » ;
S_2 : l'événement « la 2e balle de service est « bonne » » ;
G : l'événement « le point est gagné par le joueur qui est au service ».

Pour le joueur Naderer qui est au service, on dispose des données suivantes :
- sa première balle de service est jugée « bonne » dans 40% des cas ;
- sa deuxième balle de service est jugée « bonne » dans 95% des cas ;
- si sa première balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 80% des cas ;
- si sa deuxième balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 60% des cas.

Pour tout événement A on note $\overline{A}$ l'événement contraire.

1. Calculer $p(S_1 \cap G)$.
2. Montrer que la probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange est de $0,662$.
3. Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, calculer la probabilité que sa première balle de service ait été jugée « bonne ». Le résultat sera arrondi au millième.
4. Calculer la probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs, ces échanges étant supposés indépendants. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 4
1. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, $(x-1)(1-3x) < 0$.
2. Calculer l'intégrale suivante $\int_0^\pi \cos(2x)\,dx$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} < \dfrac{x+3}{2} \\ \dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{x+3}{x+1} \end{cases}$$
4. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(3t)$ en fonction de $\cos(t)$, en déduire une expression de $\cos(9t)$ en fonction de $\cos(t)$.
5. Étudier les variations sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $f : x \longmapsto x\sin(x)$.
Représentation graphique du graphe de f.
6. Calculer l'intégrale suivante
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$$
7. Résoudre l'équation $(x-5)(x-7) + (x-5)^2 = 0$.
8. Résoudre le système
$$\begin{cases} x+y = 15 \\ x^2+y^2 = 153 \end{cases}$$
(On pourra remarquer que $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$)
9. Résoudre les équations suivantes
$$\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(6) \qquad \ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(x+8))$$
10. Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans le cas où $3u_{n+1} = 2u_n + 3$, $u_0 = 4$. On commencera par déterminer α tel que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique.

Exercice 5
On note pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + \ln(4) + \frac{2}{1+e^x}$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les asymptotes éventuelles du graphe de f.
3. Tracer le graphe de f.
4. Calculer $f(x)+f(-x)$. En déduire que pour tout couple de points $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$ le point de coordonnées $I(0; 1+\ln(4))$ est le milieu du segment $[MM']$. Quelle interprétation graphique pour le graphe de f cette propriété peut-elle avoir ?
5. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution.

Exercice 6
Une urne contient 10 boules blanches et 2 noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche. On désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre total de boules prélevées.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Calculer la valeur de $P\left[X=1\right]$.
   (c) Montrer que $P\left[X=2\right] = \frac{5}{33}$
   (d) Calculer $P\left[X=3\right]$.
2. Montrer que $E\left(X\right) = \frac{13}{11}$.
3. Calculer $V\left(X\right) = \frac{65}{363}$

Exercice 7
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante, minorée par 0. En déduire qu'elle converge.
   (b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Calculer I_0 puis I_1. En déduire que la limite de $(I_n)_n$ est 0.
2. Pour tout entier naturel n, on note : $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \; dt$.
   (a) Calculer w_0 et w_1.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$.
   En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : t \mapsto \cos^{n+1}(t)\sin(t)$. Calculer f_n' puis en déduire que

$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n t \; \sin^2 t \; dt$$

   (e) En déduire : $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.
   (f) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante. Déterminer cette constante.

Exercice 8
Une boîte contient 8 cubes : $\begin{cases} \text{1 gros rouge et 3 petits rouges;} \\ \text{2 gros verts et 1 petit vert;} \\ \text{1 petit jaune} \end{cases}$ Un enfant choisit au hasard et successivement 2 cubes de la boîte sans remise (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On note A, l'événement : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" ; B, l'événement : "Obtenir au plus un petit cube". Calculer la probabilité de A. Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{9}{14}$.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X.
3. L'enfant répète n fois l'épreuve "Tirer au hasard et successivement 2 cubes de la boîte sans remise", en remettant dans la boîte les deux cubes tirés avant de procéder à l'épreuve suivante. Les épreuves sont indépendantes.
   On note P_n la probabilité que l'événement B soit réalisé au moins une fois.
   Déterminer P_n en fonction de n.

Exercice 9
Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(\theta)} \cos(\theta)\, d\theta \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2(x)}\, dx$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^3+3x}{x^4+6x^2+5}\, dx \qquad \int_0^3 \frac{x^2}{x+3}\, dx \text{ (on pourra remarquer que } x^2 = (x^2+3x)-(3x+9)+9)$$

Voici l'alphabet grec que nous utiliserons souvent.
En gras les lettres à connaître.

Noms des lettres	Majuscule	Minuscule
alpha	A	α
bêta	B	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	E	ε
dzêta	Z	ζ
êta	H	η
thêta	Θ	θ
iota	I	ι
kappa	K	κ
lambda	Λ	λ
mu	M	μ
nu	N	ν
xi	Ξ	ξ
omicron	O	o
pi	Π	π
rhô	P	ρ
sigma	Σ	σ
tau	T	τ
upsilon	Υ	υ
phi	Φ	φ
khi	X	χ
psi	Ψ	ψ
oméga	Ω	ω